# Komplexe Zahlen

$z \in \mathbb{C}$ $x = Re(z)$ $y = Im(z)$

$z = x + iy$ mit $i^2 = -1$

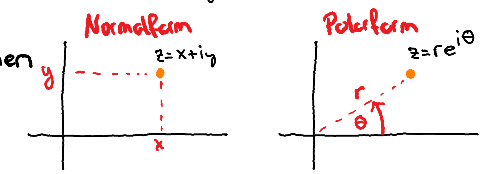
- $\overline{z w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $|zw| = |z||w|$
- $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

Konjugiert $\overline{z} = x - iy$

Betrag $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$

Kehrwert $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$ weil $z \cdot \frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1$

Formen




Eulersche Formel $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$

$\Rightarrow e^{2\pi i} = 1$ oder $e^{i\pi} + 1 = 0$

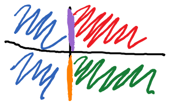
$\Rightarrow z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r \cdot e^{i\theta}$

Polar form → Normalform $x = r \cdot \cos\theta$, $y = r \cdot \sin\theta$

Normalform → Polarform $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ $\sin\theta = \frac{y}{r}$ $\cos\theta = \frac{x}{r}$

$z = r \cdot e^{i \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$ $\theta = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{falls } z \text{ im 1 Q.} \\ \frac{\pi}{2} & \text{falls } x = 0 \ y > 0 \\ \pi + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{falls } z \text{ im 2./3. Q} \\ \frac{3}{2}\pi & \text{falls } x = 0 \ y < 0 \\ 2\pi + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{falls } z \text{ im 4. Q} \end{cases}$



Multiplikation

$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

Division

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{x_2^2+y_2^2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

Wurzel ziehen

$z^n = a \Leftrightarrow r^n e^{ni\theta} = s e^{i\alpha}$

$\Rightarrow |z| = r = \sqrt[n]{s}$ $\arg(z) = \theta = \frac{\alpha + 2\pi k}{n}$ $k = 0,1,2 \dots$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rad | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
| Grad | $0°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $90°$ | $120°$ | $135°$ | $150°$ | $180°$ |
| sin x | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| cos x | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ |
| tan x | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | nan | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ |

# LGS und Gauss $Ax = b$

Elementare Zeilenoperationen (Lösung bleibt gleich)

- Reihen vertauschen - Reihen Addition - Reihen skalierung

Anzahl Lösungen ($A$ ist $m \times n$, $r$ ist rang)

$r < m$:
- → VTB sind nicht erfüllt ⇒ keine Lösung
- → VTB sind ok und $r = n$ ⇒ eine Lösung
- → VTB sind ok und $r < n$ ⇒ unendlich Lsg mit $n-r$ parameter

$r = m$:
- → $r = m = n$ ⇒ eine Lösung
- → $m = r < n$ ⇒ unendlich Lösungen mit $n-r$ parameter

# Matrizen

- $AI_n = A$ und $I_m A = A$
- $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$
- $A + B = B + A$ + kommutativ
- $(AB)C = A(BC)$ - assoziativ
- $(A+B)C = AC + BC$ Distributiv
- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
- $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$
- $(A+B)+C = A+(B+C)$ + assoziativ
- $A(B+C) = AB + AC$ Distributiv

Schreibweise $A_{m\times n} = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n) = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1- \\ \vdots \\ -a_n- \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A x = \vec{a}_1 x_1 + \vec{a}_2 x_2 + \dots + \vec{a}_n x_n$ $Ax$ ist LK der Spalten!

$AB = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \dots & A\vec{b}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 B- \\ \vdots \\ -a_m B- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \vec{b}_1 & \cdots \\ \vdots & \end{pmatrix}$

# Spezielle Matrizen 1

Transponiert $(A^T)_{ij} := (A)_{ji}$ konjugiert $(\overline{A})_{ij} := (\overline{A_{ij}})$

Hermitisch transponiert $A^H := \overline{(A)}^T = \overline{A^T}$ Hermitisch $A^H = A$

Symmetrisch $A^T = A$ Schiefsymmetrisch $A^T = -A$

Inverse $AX = XA = I_n$

Eigenschaften Transponierte Matrix

1) $(A^T)^T = A$ $(A^H)^H = A$
2) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ $(\alpha A)^H = \overline{\alpha} A^H$
3) $(A+B)^T = A^T + B^T$ $(A+B)^H = A^H + B^H$
4) $(AB)^T = B^T A^T$ $(AB)^H = B^H A^H$

Eigenschaften Inverse Matrix

1) $(A^{-1})^{-1} = A$ 2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, $(A^H)^{-1} = (A^{-1})^H$

Inverse finden $\left(A \mid I\right) \Rightarrow \left(I \mid A^{-1}\right)$

Permutationsmatrix Reihenvertauschungen

# LR-Zerlegung $PA = LR$

$\begin{pmatrix} P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ \gamma & z & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & \gamma & z \\ 0 & \omega & v \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}$

$P$: Permutationsmatrix (Zeilenvertauschungen bei Gauss)

$A$: Transformationsmatrix

$L$: $x, \gamma, z$ sind die Koeffizienten bei Gauss

$R$: $x, \gamma, z, \dots$ ist die $A \xrightarrow{\text{Gauss}} A'$

Lösung für $Ax = b$

1) $Ax = b \Rightarrow PAx = Pb = \tilde{b}$
2) $PAx = \tilde{b} \Rightarrow LRx = \tilde{b}$
3) $c := Rx$
4) $Lc = \tilde{b}$ nach $c$ mit Vorwärtseinsetzen
5) $Rx = c$ nach $x$ mit Rückwärtseinsetzen

# Vektorräume $V = \mathbb{R}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_i \in \mathbb{R} \right\}$

V1–V4: Abelsche Gruppe

V1 $x + y = y + x$ V2 $x + (y + z) = (x + y) + z$

V3 $x + 0 = 0 + x = x$ V4 $x + (-x) = 0$

V5 $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ V6 $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

V7 $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$ V8 $1x = x$

V5–V8: $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$

Spezielle Vektorräume

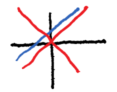
$V = \mathbb{R}^{m \times n} = \{A = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}\}$

Matrix Addition, Skalar Multiplikation, Null Matrix

$V = \{f : \mathbb{R}_1 \to \mathbb{R}_2 \mid f \text{ ist eine Abbildung}\}$

$(f+g)(t) = f(t) + g(t)$, $(\alpha f)(t) = \alpha f(t)$, $O: x \mapsto 0$

# Unterräume $U \subset V$



Validierung:

1. Abgeschlossen bezüglich Vektor addition
2. Abgeschlossen bezüglich Vektormultiplikation
3. Enthält Nullvektor. (geht durch 0-Punkt)

Erzeugendes System

$\text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ oder $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ ← Unterraum

Die Vektoren $v_1, \dots, v_k$ sind das erzeugende System.

$\text{span}\{v_1, \dots, v_k\} := \{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}\} \in$ alle LK.

Lineare Abhängigkeit

Abhängig: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0$ und nicht alle $\alpha$ sind 0

Unabhängig falls $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ alle 0 sein müssen

Basis linear unabhängiges Erzeugende System von V

Dimension # Vektoren der Basis von V

$K(u+v) = K(u) + K(v)$
$K(\alpha v) = \alpha K(v)$

# Koordinatenform und Basistransformation

Koordinatenvektor

$K: V \to \mathbb{K}^n$ wobei $K$ ist bijektiv und linear

$v \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = [v]_{\mathcal{B}} = \xi$

Jeder Vektor $v \in V$ kann als LK der Vektoren von $\mathcal{B}$ geschrieben werden.

Basis Transformation Alle $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ Neue $B' = \{b_1', \dots, b_n'\}$

Transformationsmatrix $T = (T_{ik}) = \begin{pmatrix} | & & | \\ [b_1']_B & \dots & [b_n']_B \\ | & & | \end{pmatrix}$ ist regulär ⇔ hat inverse

$T^{-1} = \begin{pmatrix} | & & | \\ [b_1]_{B'} & \dots & [b_n]_{B'} \\ | & & | \end{pmatrix}$

Koordinatenwechsel $\xi = T\xi'$ ⇔ $\xi' = T^{-1}\xi$

$$\begin{array}{ccc} V, B & & V, B' \\ x & \xrightarrow{\text{id}} & x \\ K_{VB} \downarrow & & \downarrow K_{VB'} \\ \xi & \underset{T^{-1}}{\overset{T}{\leftrightarrows}} & \xi' \end{array} \quad \Rightarrow B' = BT$$

# Lineare Abbildungen $\underline{X}, \underline{Y}$ Vektorräume über $\mathbb{K}$

$F: \underline{X} \to \underline{Y}$

1) $F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in \underline{X}$ (in X, in Y)
2) $F(\alpha x) = \alpha F(x)$ $\forall x \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$
3) $F(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha F(x_1) + \beta F(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in \underline{X}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

Abbildungsmatrix

$A = \text{Mat}(F, \underset{\underline{X}}{B}, \underset{\underline{Y}}{C}) = \begin{pmatrix} | & & | \\ [F(b_1)]_C & \cdots & [F(b_n)]_C \\ | & & | \end{pmatrix}$ Basis

$x \in \underline{X}$ $y \in \underline{Y} \Rightarrow [y]_C = A[x]_B$ Hängt von Basen ab!

$$\begin{array}{ccc} \underline{X}, B & \xrightarrow{F} & \underline{Y}, C \\ x & \longmapsto & F(x) = y \\ K_{\underline{X}B} \downarrow & & \downarrow K_{\underline{Y}C} \\ \mathbb{E}^n \ni [x]_B & \xrightarrow{A} & [F(x)]_C = [y]_C \in \mathbb{E}^m \end{array}$$

$[x]_B = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ $[y]_C = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix}$

$\eta = A\xi$

## Konzepte von linearen Abbildungen

Injektiv: $F(x_1)=F(x_2) \Leftrightarrow x_1=x_2$ Surjektiv: $\forall y \exists x\ F(x)=y$

Bijektiv: inj + sur. F surjektiv ⇒ A invertierbar ⇒ $Ax=0$ nur trivial

↳ Isomorphismus $F: \underline{X} \to \underline{X}$ ist automorphismus

Transformationen kombinieren

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[r, "F"', "GA"] \arrow[rr, bend right, "G \circ F"'] & \underline{Y} \arrow[r, "G"', "GB"] & \underline{V} \end{tikzcd}$$

BA, da zuerst mit A von $\underline{X}$ nach $\underline{Y}$ transformiert wird

↳ BA

### Lineare Abbildungen mit Basiswechsel

$$\begin{tikzcd} \underline{X} & B \arrow[r, bend left, "T^{-1}"] \arrow[d, "A"'] & B' \arrow[l, "T"] \arrow[d, "A'"] \\ \underline{Y} & C \arrow[r, "S"] & C' \arrow[l, bend left, "S^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$\eta = A\xi = S\eta' \Rightarrow \eta' = S^{-1}A\xi = S^{-1}AT^{-1}\xi'$

$A' = S^{-1}AT \quad A = SA'T^{-1}$

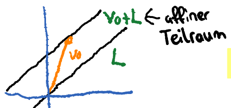
## Aussagen zur Dimension

(i) $F: X \to Y$ inj. $\Leftrightarrow$ Rang $A = \dim X$

(ii) $F: X \to Y$ bij. $\Leftrightarrow$ Rang $A = \dim X = \dim Y$

(iii) $F: X \to X$ bij $\Leftrightarrow$ Rang $A = \dim X \Leftrightarrow \ker F = \{0\}$

## Affine Teilräume und Abbildungen




$v_0 + L = \{v_0 + u \mid u \in L\}$

Affine Abbildung:

$H: X \to y_0 + Y$

$x \mapsto y_0 + F(x)$ ← $F: X \to Y$ ist linear!

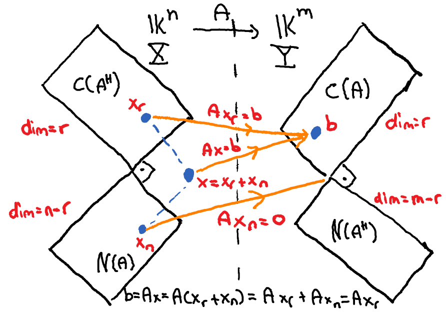
$Ax = b$ falls $b \neq 0$

↳ $x = x_p + \lambda_1(\ ) + \lambda_2(\ ) + \ldots + \lambda_n(\ )$

↑ Partikulärlösung gefunden durch $Ax=b$ mit allen freien Variablen $=0$

↑ Ker A

## Fundamentalräume einer Matrix




1. Column Space $\operatorname{Im}(A)/C(A)/R(A)$
   $C(A) = \{y \mid y = Ax\}$ Unterraum von $\underline{Y}$

   Finde $C(A)$: $A \xrightarrow{\text{Gauss}} R$ danach alle Spalten vektoren mit Pivots in R von A

2. Null Space $N(A)/\ker(A)$
   $N(A) = \{x \mid Ax = 0\}$ Unterraum von $\underline{X}$

   Finde $N(A)$: $A \xrightarrow{\text{Gauss}} R$ Jeweils 1 freien Param auf 1, alle anderen auf 0

3. Row space $C(A^H)/R(A^H)$
   $C(A^H) = \{y \mid y^H = x^H A\}$

   Finde $C(A^H)$: $A \xrightarrow{\text{Gauss}} R$ $\quad C(A^H) = C(R^H)$
   Die Spalten $\neq 0$ von $R^H$ sind basis

4. Left null space $N(A^H)$
   $N(A^H) = \{y \mid A^H y = 0\}$

## Normen und Skalarprodukt

Normfunktion $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \|x\|$

(N1) (semi) positiv definit $\|x\| \geq 0$
$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(N2) homogen $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

(N3) Dreiecksungleichung $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Euklidische / 2-Norm
$\mathbb{R}$: $\|x\|_2 := \sqrt{x^T x} = \sqrt{\langle x, x \rangle}$
$\mathbb{C}$: $\|x\|_2 := \sqrt{x^H x}$

Induzierte Norm $\|x\|_V = \sqrt{\langle x, x \rangle_V}$

Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \to \mathbb{E}$
$(x,y) \mapsto \langle x, y \rangle$

(S1) Linear im zweiten Faktor — Falls $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ auch im 1.
$\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
$\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

(S2) Symmetrisch wenn $\mathbb{E} = \mathbb{R}$, sonst hermitisch
$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \qquad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

(S3) (semi) positiv definit $\langle x, x \rangle \geq 0$
$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Euklidisches Skalarprodukt
$\mathbb{R}: \langle x, y \rangle := x^T \cdot y \qquad \mathbb{C}: \langle x, y \rangle := x^H y$

Gewichtetes Skalarprodukt $\omega \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Diag.
$\langle x, y \rangle_\omega := x^H \omega y$
Induzierte Norm: $\|x\|_\omega = \sqrt{x^H \omega y} = \sqrt{\langle x, y \rangle_\omega}$

Winkel $\langle x, y \rangle = \|x\|_2 \|y\|_2 \cdot \cos(\measuredangle(x,y))$

$\mathbb{E} = \mathbb{R}$: $\measuredangle(x,y) = \cos^{-1}\left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}\right)$

$\mathbb{E} = \mathbb{C}$: $\measuredangle(x,y) = \cos^{-1} \frac{\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle)}{\|x\| \|y\|}$

Cauchy Schwarz Ungleichung
$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$
$=$ anstatt $\leq$ falls x und y linear abhängig

Satz von Pythagoras
$x \perp y \Rightarrow \|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

$x \in V$ mit $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ Orthonormalbasis
$x = \sum_{k=1}^{n} \langle b_k, x \rangle b_k \Rightarrow \xi_k = \langle b_k, x \rangle$
$\Rightarrow \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^T$

## Vorteile von Orthonormalbasen

Koordinaten berechnen normal $\begin{pmatrix} | & | & & | \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = x$ LGS lösen

Mit Orthonormalbasis mit eukl. S.P. $\xi_1 = \langle b_1, x \rangle = b_1^T x \ldots$

Mit Orthonormalbasis und div. S.P. $\xi_1 = \langle b_1, x \rangle_V$

Parsevalsche Formel: Euklidisches S.P. im Koordinatenraum $\mathbb{E}^n$ = Abstraktes Skalarprodukt definiert in V

V mit $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$

$\langle x, y \rangle_V = \sum_{k=1}^{n} \overline{\xi_k} \eta_k = \xi^H \eta = \langle \xi, \eta \rangle_{\mathbb{E}^n}$ ← Euklidische S.P. in $\mathbb{E}^n$

Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren $\{a_1, \ldots, a_m\} \subseteq V$ linear unabhängig

1) $b_1 = \frac{1}{\|a_1\|_V} a_1$ 2) $\tilde{b}_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle b_j, a_k \rangle_V b_j$ 3) $b_k := \frac{1}{\|\tilde{b}_k\|_V} \tilde{b}_k$

## Orthogonale Komplemente

$U \subseteq V \quad U^\perp := \{y \in V \mid y \perp U\} \Rightarrow U^\perp \perp U$ und $V = U \oplus U^\perp$

$U^\perp$ finden
1) Orthonormalbasis $\{b_1, \ldots, b_\ell\}$ für U finden
2) Basis erweitern für V $\{b_1, \ldots, b_\ell, a_{\ell+1}, \ldots, a_n\}$ — linear unabhängig
3) Gram-Schmidt ausführen von $a_{\ell+1}$ aus

$\Rightarrow U = \operatorname{span}\{b_1, \ldots, b_\ell\} \quad U^\perp = \operatorname{span}\{a_{\ell+1}, \ldots, a_n\}$

Orthogonale Komplemente für Fundamentale Räume einer Matrix

$Ax = 0 \Leftrightarrow x \perp$ alle Spalten von $A^H$

$a_1 x = (\underline{a}_1^H)^H x = \langle \underline{a}_1^H, x \rangle = 0 \Rightarrow x \perp \underline{a}_1^H$

$x \in N(A) \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow x \perp R(A^H) \Leftrightarrow x \in (R(A^H))^\perp$

## Basiswechsel zwischen Orthonormalbasen

$\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\} \quad \mathcal{B}' = \{b_1', \ldots, b_n'\}$

$b_k'$ in Koordinaten von $\mathcal{B}$ darstellen

$\tau_{jk} = \langle b_j, b_k' \rangle \quad \tilde{\tau}_{\ell m} = \langle b_\ell', b_m \rangle \quad b_m = \sum_{\ell=1}^{n} \tilde{\tau}_{\ell m} b_\ell' \quad b_k' = \sum_{j=1}^{n} \tau_{jk} b_j$

$\Rightarrow \tilde{T} = T^{-1} = T^H \qquad T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1n} \\ \vdots & & & \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \ldots & \tau_{nn} \end{pmatrix} \qquad T\xi' = \xi \Leftrightarrow T^H \xi = \xi'$

## Unitäre und orthogonale Matrizen

Det ist 1 oder -1
Jeder Vektor Normiert!

Unitär: $A^{-1} = A^H$
Orthogonal: $A^{-1} = A^T$

} Spalten bilden Orthonormalbasis in $\mathbb{E}^n$ mit euklidischem S.P.

# Orthogonale / unitäre Abbildungen

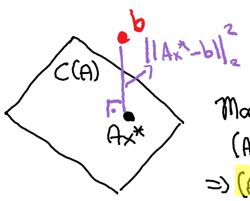
$F: X \to Y \quad \forall v,w \in X: \langle v,w\rangle_X = \langle F(v), F(w)\rangle_Y$

1) F ist längentreu / isometrisch $\|v\|_X = \|F(v)\|_Y$
2) $v \perp w \iff F(v) \perp F(w)$
3) $\ker(F) = \{0\}$, d.h. F injektiv

Falls $\dim X = \dim Y = n \ (n < \infty)$

4) F ist isomorphismus
5) $\{b_1, .., b_n\}$ ist O.N.B von X $\iff \{F(b_1), .., F(b_n)\}$ O.N.B. Y
6) $F^{-1}$ ist unitär / orthogonal
7) Abbildungsmatrix $A = \text{mat}(F, B, C)$ ist orthogonal / unitär $A^H A = A A^H = I$

# Methode der kleinsten Quadrate




$x^* = \underset{x \in \mathbb{E}^n}{\arg\min} \|Ax - b\|_2^2$

Man sucht $x \in \mathbb{E}^n$, so dass $(Ax-b) \perp R(A)$

$\Rightarrow (Ax-b) \in R(A)^\perp = N(A^H)$

$\Rightarrow A^H(Ax-b) = 0$

**Normalengleichung** $A^H A x^* = A^H b$

A hat vollen Rang!

$$x^* = \underbrace{(A^H A)^{-1} A^H}_{\text{Monroe Pseudo Inverse}} b$$

QR-Zerlegung $Rx^* = Q^H b$

# QR-Zerlegung

1) Gram-Schmidt auf A

$q_1 = a_1 / \|a_1\| \quad \tilde{q}_k := a_k - \sum_{j=1}^{k-1} q_j \underbrace{\langle q_j, a_k\rangle}_{q_j^H a_k} \quad q_k = \frac{\tilde{q}_k}{\|\tilde{q}_k\|}$

2) Vektoren $a_k$ als LK von $\{q_1, .., q_n\}$

$a_1 = q_1 \cdot \|a_1\|, \quad a_k = q_k \|\tilde{q}_k\| + \sum_{j=1}^{k-1} q_j (q_j^H a_k)$

$r_{11} = \|a_1\| \qquad r_{kk} = \|\tilde{q}_k\| \qquad r_{jk} = q_j^H a_k$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & & | \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & \dots & & r_{nn} \end{pmatrix}}_{R}$$

A = Q R

# Determinante

Det $: \mathbb{E}^{n\times n} \to \mathbb{E}, \ A \mapsto \det A$

$\det A \neq 0 \iff$ A ist regulär

$\det A = 0 \iff$ A ist singulär

$\det(A) = \det A = |A| := \sum_{p \in S_n} \text{sign}(p) \cdot a_{1,p(1)} \dots a_{n,p(n)}$

**Permutationen** $p: \{1,2,\dots n\} \to \{1,2,\dots n\}$
$(1,2,\dots,n) \mapsto (p(1), \dots, p(n))$

jede Permutation kann mit einer gewissen Anzahl (v) Transpositionen (Vertauschung benachbarter Elemente) gebildet werden.

Signum: $\text{sign}(p) \overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} +1, & v \text{ gerade} \\ -1, & v \text{ ungerade} \end{cases}$

**Determinante entwickeln**

1) $|a_{11}| = a_{11}$
2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$
3) entwickeln nach Spalte / Zeile

k-ter Zeile $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \cdot \det A_{[k,j]}$

l-ten Spalte $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+l} a_{j,l} \cdot \det A_{[j,l]}$

4) $\nabla / \Delta$ Matrix $\det A =$ Produkt Diag

**Eigenschaften der Determinanten**

(i) det ist linear in jeder Zeile $\begin{vmatrix} a_1 \\ \alpha\omega + \beta v \\ a_3 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_1 \\ \omega \\ a_3 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a_1 \\ v \\ a_3 \end{vmatrix}$
(ii) Werden zwei Zeilen vertauscht, so wechselt das Vorzeichen
(iii) $\det(I) = 1$
(iv) Hat A Zeile aus lauter 0en $\Rightarrow \det(A) = 0$
(v) $\det(\gamma A) = \gamma^n \det(A)$
(vi) Hat A zwei gleiche Zeilen $\Rightarrow \det(A) = 0$
(vii) Addiert man ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen, ändert sich $\det(A)$ nicht.
(viii) Ist A eine Diagonalmatrix, so ist $\det(A) =$ Produkt $\begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$
(ix) Ist A eine Dreiecksmatrix, so ist $\det(A) =$ Produkt $\begin{bmatrix} * & X \\ 0 & * \end{bmatrix}$

**Nice to know: Determinante**

$A \xrightarrow{\text{Gauss}} R: \ \det(A) = (-1)^v \prod_{k=1}^{n} r_{kk} \quad v \hat{=} \#$ Vertauschungen

$\det(AB) = \det(B) \cdot \det(A) \qquad \det(A^T) = \det(A)$

$\det(A^{-1}) = 1 / \det(A) \qquad \det(A^H) = \overline{\det(A)}$

# Eigenwerte und Eigenvektoren

**Eigenwert** $F: V \to V \quad F(x) = \lambda x$

Unterraum: $E_\lambda := \{v \in V \mid F(v) = \lambda v\}$

$E_\lambda = \ker(A - \lambda I)$

A hat einen E.W $\lambda \iff$ F hat einen E.W $\lambda$

$v \neq 0, F(v) = \lambda v \iff A\xi = \lambda \xi, \ \xi = K_v(v)$

**Spektrum von F** Menge aller Eigenwerte von F

**Äquivalenzen** $Ax = \lambda x$

$\iff Ax - \lambda x = 0, \ x \neq 0$

$\iff (A - \lambda I)x = 0, \ x \neq 0$

$\iff (A - \lambda I)$ hat nicht trivialen Kern

$\iff \det(A - \lambda I) = 0$

**Das charakteristische Polynom einer Matrix**

$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$\lambda \in \mathbb{E}$ ist E.W. von A

$\iff \lambda$ ist Nullstelle von $\chi_A$

$\iff \lambda$ ist Lösung der charakteristischen Gleichung

$\det(A - \lambda I) \overset{\text{Permutationsformel}}{=} (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) + \underbrace{\dots}_{\text{alle anderen permutationen}}$

$= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{spur}(A) + c_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + \det(A) \lambda^0$

$\text{Spur}(A) = \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

**Geometrische Vielfachheit**

$\dim E_\lambda = \dim \ker(A - \lambda I)$ geo V. $\le$ alg. V.

**Algebraische Vielfachheit**

Wie viel mal $\lambda^*$ Nullstelle von $\chi_A(\lambda)$

**Triviale E.W** – 0 für singuläre Matrizen
– 1 für $I_n$

**Ähnliche Matrizen** $C = T^{-1} A T$

C ist gleich Abbildung bezüglich anderer Basis

$\Rightarrow \det(A) = \det(C), \ \chi(C) = \chi(A), \ \text{tr}(A) = \text{tr}(C)$

**Eigenvektor zu $\lambda$ finden**

Löse $(A - \lambda I)x = 0$

E.V. zu verschiedenen E.W. sind linear unabhängig.

# Spektralzerlegung / Eigenwertzerlegung

Sind die n Eigenwerte von $F: V \to V$ ($n = \dim V$) verschieden, so gibt es eine Basis von Eigenvektoren und die Abbildungsmatrix ist diagonalisierbar. Aber es gibt auch Matrizen mit mehrfachen Eigenwerten, die diagonalisierbar sind. (z.B. $I_n$)

A ist diagonalisierbar $\iff \forall \lambda$ (alg. V von $\lambda$ = geo. V. von $\lambda$)

$$\boxed{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}}_{V} = \underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}}_{V} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda} \Rightarrow A = V \Lambda V^{-1}$$

# Spektralsatz

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $A^H = A$

(i) alle E.W sind reell
(ii) die E.V zu verschiedenen E.W sind paarweise orthogonal bzgl. des euklidischen S.P in $\mathbb{C}^n$
(iii) Es gibt eine orthonormale Basis des $\mathbb{C}^n$ aus E.V. $u_1, u_2, \dots u_n$ von A
(iv) Für die unitäre Matrix $U = (u_1 \dots u_n)$ gilt: $U^H A U = \Lambda$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $A^T = A$

(i) alle E.W sind reell
(ii) die reellen E.V zu verschiedenen E.W sind paarweise orthogonal bzgl. des euklidischen S.P in $\mathbb{R}^n$
(iii) Es gibt eine orthonormale Basis des $\mathbb{C}^n$ aus E.V. $u_1, u_2, \dots u_n$ von A
(iv) Für die orthog. Matrix $U = (u_1 \dots u_n)$ gilt: $U^H A U = \Lambda$

**Normale Matrizen** $A^H A = A A^H$ A normal $\iff$ diagonalisierbar durch unitäre Matrix

**Definit** $A \in \mathbb{E}^{n\times n} \quad A^T = A \ / \ A^H = A$

positiv definit: $\forall x \in \mathbb{E}^n, x \neq 0 \quad x^H A x > 0 \quad \iff$ alle E.W $> 0$

positiv semi definit: $\forall x \in \mathbb{E}^n, x \neq 0 \quad x^H A x \ge 0 \quad \iff$ alle E.W. $\ge 0$

# Singulärwertzerlegung S.V.D $A = U \Sigma V^H$

**Diagonalwerte $\Sigma$** $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \sigma_3 \ge \sigma_r > \sigma_{r'} = \dots = \sigma_n = 0$ (Rang A; falls $n \le m$, sonst bis $\sigma_m$)

**U** diagonalisiert $AA^H = U \left(\begin{array}{c|c} \sigma_1^2 \ \dots \ \sigma_r^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) U^H$ **V** diagonalisiert $A^H A = V(\ \text{"}\ )V^H$

$A \in \mathbb{R}^{m\times n} \Rightarrow U, V$ sind reell und orthogonal. Singulärwerte immer reell $\ge 0$

**Berechnen**

1. Berechne $m\times m$ $A \cdot A^T$
2. Berechne eigenwerte $\sigma_i^2$ und Eigenvektoren $u_i$ von $A \cdot A^T$
3. $u_i$ werden orthonormalisiert (Gram-Schmidt) und bilden Spaltenvektoren von U
4. Berechne $n\times n$ $A^T A$
5. Berechne Eigenwerte $\sigma_j^2$ und Eigenvektoren $v_j$ von $A^T A$ $(v_j = u_i)$
6. $v_j$ werden orthonormalisiert (Gram-Schmidt) und bilden die Spaltenvektoren von V
7. Die Wurzeln der $\sigma^2$-Werte werden sortiert in absteigender Reihenfolge

# Nice to know & Beweise

## A ist hermitesch & positiv semi definit.

Wieso $A = A^{\frac{1}{2}} \cdot A^{\frac{1}{2}}$

Weil A hermitesch: $AA = A^H A = A A^H$. Weil psd ist, sind alle Eigenwerte $\geq 0$.

$A = U \Lambda U^H$, weil symmetrische Matrizen orthogonale Eigenvektoren haben.

$\Rightarrow \Lambda = U^H A U$. Weil positiv $\Lambda = \Lambda^{\frac{1}{2}} \cdot \Lambda^{\frac{1}{2}}$ wobei $\Lambda^{\frac{1}{2}}$ der Matrix mit den Wurzeln der Eigenwerte beschreibt.

$\Rightarrow A = U \Lambda U^H = U \Lambda^{\frac{1}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}} U^H = U \Lambda^{\frac{1}{2}} I \Lambda^{\frac{1}{2}} U^H$

$\quad = U \Lambda^{\frac{1}{2}} U^H U \Lambda^{\frac{1}{2}} U^H$

$\Rightarrow A^{\frac{1}{2}} = U \Lambda^{\frac{1}{2}} U^H$ ∎

## $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zu zeigen $\|Ax\|_2 \leq \sigma_{max} \|x\|_2$

$\|Ax\|_2 = \|U \Sigma V^T x\|_2$

$\quad = \|\Sigma V^T x\|_2$ (U ist längentreu)

$\quad = \|\Sigma x\|_2$ ($V^T$ ist längentreu)

$\sigma_{max} \|x\|_2 = \sigma_{max} \|I x\|$

$\quad = \|\sigma_{max} I x\|$

$\Sigma_{max} := \sigma_{max} I \Rightarrow \sigma_{max} \|x\|_2 = \|\Sigma_{max} x\|_2$

$\Rightarrow \|\Sigma x\|_2 \leq \|\Sigma_{max} x\|_2$ weil $\Sigma_{max}$ offensichtlich stärker skaliert, weil die Elemente größer sind. ∎

## LS mit einem genauen Datenpunkt

Punkte: (1,5), (2,3), (3,1), (4,4)

Gesucht $y = a_1 + a_2 x$ durch Punkt (2,3)

1. $3 = a_1 + a_2 \cdot 2 \Rightarrow a_1 = 3 - a_2 \cdot 2$
2. Ersetzen: $y = 3 - a_2 2 + a_2 x$

   $\Rightarrow y - 3 = a_2 (x - 2)$
3. $A = \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 2 \\ x_3 - 2 \\ x_4 - 2 \end{pmatrix}$ $x^* = \begin{pmatrix} a_2 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} y_1 - 3 \\ y_2 - 3 \\ y_3 - 3 \\ y_4 - 3 \end{pmatrix}$
4. Löse $A x^* = b$ mit Least Squares